**Лекция 7 (24.03.20) Инвариантные подпространства. Собственные векторы.**

**§ 6. Инвариантные подпространства.**

Напомню, что в первом семестре рассматривались инвариантные прямые для аффинных преобразований плоскости. Наличие инвариантных прямых позволяло более наглядно представить себе, как действует преобразование.

Теперь это понятие обобщается на произвольные линейные преобразования линейных пространств.

Определение 1. Пусть  – линейное преобразование пространства L. U – Подпространство U в L называется инвариантным относительно φ (короче, φ -инвариантным подпространством), если , т.е. .

В этом случае можно определить ограничение (или сужение) преобразования  на инвариантное подпространство U -  (1)

Ограничение является линейным преобразованием пространства U.

**Теорема 1.** 1) Если преобразование  имеет инвариантное подпространство , то в L существует базис ***e***, в котором матрица имеет блочно-треугольный вид

, (2)

где - квадратные матрицы порядков m, n-m соответственно. При этом  - матрица ограничения  на U.

2) Если для U можно найти инвариантное дополнение V, т.е. такое инвариантное подпространство V, что то в L существует базис ***e***, в котором матрица имеет блочно-диагональный вид

, (3)

причем  - матрица ограничения  на U, - матрица ограничения  на V.

Доказательство. 1) Выберем - базис в U и дополним его до базиса в L. Тогда , т.е. координаты векторов  c (m+1)-й по n-ю равны нулю. Таким образом, в выбранном базисе ***e*** матрица  имеет вид (2).

2) На этот раз выберем базис в U и дополним его до базиса в L векторами из V. Тогда , откуда видно, что в базисе, согласованном с разложением , матрица  имеет вид (3). Ч.т.д.

*Замечание.* Верно и обратное. Если в некотором базисе пространства L матрица линейного преобразования  имеет вид (2), то линейная оболочка первых m базисных векторов является инвариантным подпространством U. А если матрица  имеет вид (3), то линейная оболочка остальных базисных векторов является инвариантным подпространством V, и .

Рассмотрим два примера.

Пример 1. Пусть  - поворот трехмерного пространства векторов  (приложенных в начале координат) вокруг прямой l =U c направляющим вектором  на угол. Тогда инвариантные подпространства – эта прямая и плоскость , перпендикулярная вектору , причем .

Пример 2. Пусть - прямая сумма ненулевых подпространств. Тогда любой вектор  единственным образом записывается в виде . Преобразование  - проектирование L на L1 параллельно L2: . Мы знаем уже, что это преобразование линейное,  . Эти подпространства являются инвариантными.

И это не случайно.

**Утверждение 2.** Для линейного преобразования  инвариантными подпространствами являются: 1) ; 2) ; 3) Любое подпространство, содержащее .

Отметим также инвариантность действий над инвариантными подпространствами.

Утверждение 3. Если  - -инвариантные подпространства в , то 1)  и 2)  также инвариантны.

Доказательства оставляю в качестве упражнений.

**§ 7. Собственные векторы и собственные значения линейных преобразований.**

Вспомним сначала теорему о том, что любое аффинное преобразование плоскости является произведением ортогонального преобразования и сжатий к двум перпендикулярным прямым. Для многомерного обобщения осмысленно говорить о растяжениях вдоль направляющих векторов этих прямых.

Основное **определение 1.** Собственным вектором линейного преобразования  над полем K называется **ненулевой** вектор , если  (1).

Это число  называется собственным значением преобразования . Часто говорят, что - собственный вектор с собственным значением .

Отметим, прежде всего, очевидное

Утверждение 1. Для данного множество всех векторов  является линейным подпространством в L. Его можно охарактеризовать как .

Оно называется собственным подпространством линейного преобразования , отвечающим собственному значению .

Примеры. 1. Пусть - пространство бесконечно дифференцируемых функций на прямой, - преобразование взятия производной. Для любого  имеем , т.е. эти функции – собственные для . Можно доказать, что других таких функций нет.

Пример 2. В примере 2 предыдущего параграфа собственными подпространствами будут и .

Покажем, что других собственных значений нет. Допустим, что , т.е. .

Так как , то  и . Отсюда следует, что либо , либо.

Теперь опишем способ вычисления собственных значений и собственных векторов в конечномерном пространстве с помощью матриц.

Пусть в данном базисе ***e*** пространства L преобразование  имеет матрицу  и  - собственный вектор. Тогда

 (2).

Система уравнений (2) может иметь ненулевое решение только если

 (3)

Уравнение (3) называется характеристическим уравнением матрицы , его корни – характеристическими корнями.

На этой стадии мы можем указать предварительный рецепт решения задачи о собственных векторах и собственных значениях.

1. Составить характеристическое уравнение (3) и найти его корни.
2. Для каждого характеристического корня , принадлежащего основному полю K, найти все (ненулевые) решения системы (2).

(Обычно основное поле – действительные числа, и в качестве собственных значений подходят только действительные корни уравнения (3).)

На самом деле левая часть уравнения (3) – многочлен степени n, называемый характеристическим многочленом матрицы . Примем обозначение  (4).

Раскроем определитель:

(5)

Утверждение 2. Характеристический многочлен матрицы линейного преобразования не зависит от выбора базиса.

Доказательство. Пусть - новый базис, S –матрица перехода. Как мы знаем, , ч.т.д.

Тем самым можно говорить о характеристическом многочлене линейного преобразования.

Ключевой при изучении собственных векторов является

**Теорема 3**. Пусть - собственные векторы линейного преобразования  с попарно различными собственными значениями . Тогда  линейно независимы.

Доказательство. Надо доказать, что если  , то .

Докажем индукцией по m. Для m = 1 это верно по определению. При m>1 предположим, что утверждение верно для m-1, и докажем для m. Вычислим от (6):

 (7)

Умножим (6) на и вычтем из (7), получим . По предположению индукции, . Но . Утверждение доказано.

Следствие. Если характеристический многочлен имеет n различных (вещественных) корней (у многочлена степени n их не более n) и - соответствующие собственные векторы, то - базис в L.

В самом деле, по теореме 3, линейно независимы, и количество их равно размерности L.

Посмотрим, какой вид приобретет матрица в базисе из собственных векторов. Вектор , в базисе  имеет столбец координат (1 равна j-я координата), вектор  имеет столбец координат , поэтому матрица  диагональная, на диагонали находятся собственные значения (в выбранном порядке).

В следующем параграфе мы подробнее рассмотрим условия диагональности матрицы линейного преобразования.